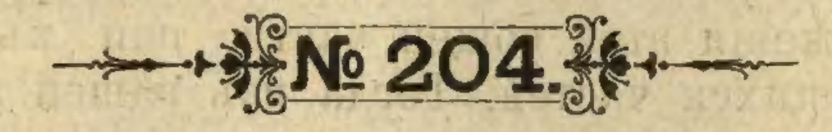
XVII Сем. 15-го декабря 1894 г. № 12.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



О СОСТАВЛЕНІИ И РѢШЕНІИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ НА ВРАЩЕНІЕ.

„Въ треугольникѣ есть великая сила.
Не даромъ Всевидящее око помѣщается въ треугольникѣ“.

Изъ наставленій учителя давнихъ временъ.

Разнообразіе геометрическихъ задачъ на построеніе рѣшительно безконечно и назначить границу человѣческому творчеству въ изобрѣтеніи содержанія и формы этихъ задачъ невозможно*). Однако въ этомъ творчествѣ можно уловить нѣкоторую правильность и развитіе нѣкоторой идеи. Указать, по мѣрѣ возможности, то и другое и составляетъ цѣль этой записки. Пока рѣчь пойдетъ только о задачахъ на перенесеніе и, главнымъ образомъ, на вращеніе. Ограничиваясь этой областью, авторъ отчасти имѣлъ въ виду то обстоятельство, что большинство рѣшающихъ задачи на построеніе инстинктивно склоняются чаще всего къ инымъ способамъ рѣшенія; съ другой стороны составители сборниковъ задачъ, а также лица, печатно предлагающія свои задачи для рѣшенія, почти всегда обходятъ задачи на вращеніе. Причина этого, конечно, лежитъ въ недостаточномъ распространеніи изученія вращенія; послѣдствіемъ же этого выходитъ, что указаннымъ лицамъ методъ вра-

*) Довольно смѣлую и весьма печальную попытку этого рода можно найти въ соч. „Собраніе геометрическихъ задачъ на построеніе“. П. Некрасова, Москва, 1891 г.

щенія не представляетъ того могучаго для достиженія цѣли орудія, каковымъ онъ существуетъ на самомъ дѣлѣ. Сверхъ того авторъ надѣется, что нѣкоторые его примѣры и задачи будутъ интересны и сами по себѣ.

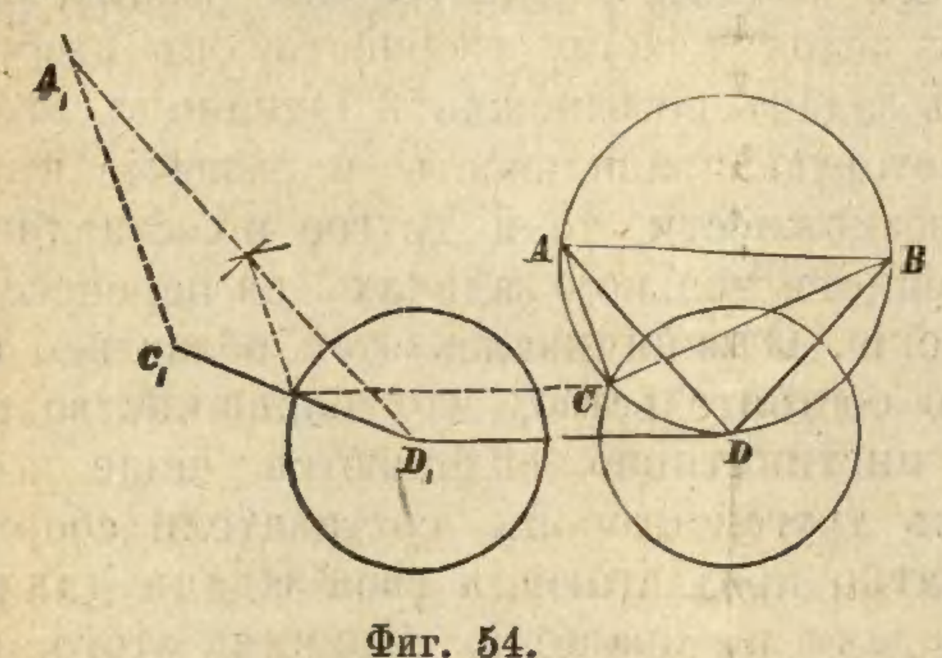
Пусть фигура A разбивается на нѣсколько частей; назовемъ черезъ a и b двѣ ея части. Возьмемъ или составимъ задачу, сущность которой состоитъ въ построеніи фигуры A по нѣкоторымъ даннымъ частямъ фигуръ a и b. Пусть фигуры a и b имѣютъ какую нибудь общую часть, напр., одну сторону, или двѣ непосредственно соприкасающіяся части. Допустимъ, что построеніе фигуры A приводится къ опредѣленію положенія этой общей части, или къ опредѣленію положенія соприкасающихся частей. Тогда изъ нашей задачи можно составить цѣлый рядъ задачъ слѣдующими способами.

I.

Перенесемъ параллельно фигуру a на извѣстное разстояніе и въ извѣстномъ направленіи, умножимъ ее на какое нибудь число; получимъ фигуру a_1. Очевидно, то, что было дано въ фигурѣ a, станетъ извѣстнымъ и даннымъ въ фигурѣ a_1, и обратно.

Если мы выберемъ въ фигурахъ a_1 и b за неизвѣстныя тѣ части, которыя до перенесенія совпадали или соприкасались, то мы можемъ составить новую задачу, состоящую въ построеніи фигуръ a_1 и b по даннымъ, вполнѣ соотвѣтствующимъ даннымъ частямъ и условіямъ въ фигурахъ a и b. Эта задача послѣ обратнаго перенесенія и умноженія приведется къ первоначальной задачѣ. Если угодно, для большей маскировки можно дать фигурамъ a и b другіе геометрическіе термины:— это весьма легко сдѣлать, пустивъ въ дѣло геометрическія мѣста. Напримѣръ имѣемъ такую задачу.

1. *Построить фигуру* ABCD *по даннымъ* AD, DB, CD *и* $\angle$ADB *такъ, чтобъ* $\angle\angle$CAD и CBD *были равны* (фиг. 54).



Фиг. 54.

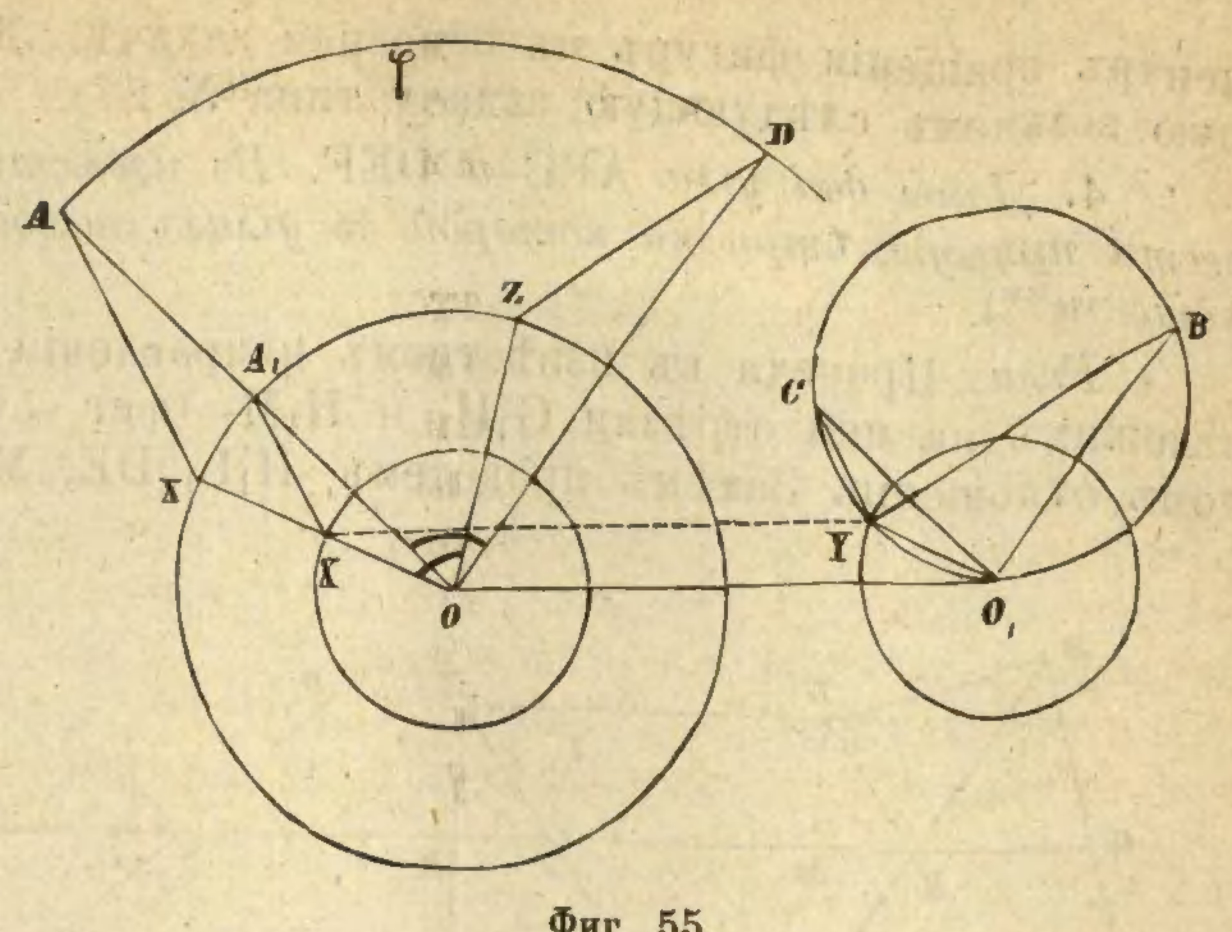
Рѣш. Построивъ $\triangle$ ADB и описавъ окружность изъ центра D радіусомъ DC, проведемъ окружность черезъ A, B и D. Въ пересѣченіи получится точка C.

Въ этомъ случаѣ, по принятому обозначенію, фигура A есть ABCD, а фигуры a и b суть ACD и CBD, имѣющія общую часть CD. Задачу № 1 и подобныя ей задачи, служащія точкой отправленія для составленія новыхъ задачъ, согласимся называть основными.

Поступая какъ сказано, т. е., умножая $\triangle$ CAD на 2 и перенеся его параллельно въ положеніе $A_1C_1D_1$ и дѣлая неизвѣстными DC и D_1C_1, мы получимъ новую задачу, которую послѣ перемѣны буквъ можно выразить такъ:

2. *Даны двѣ точки* A *и* B *и двѣ окружности* O *и* O_1. *Провести параллельные радiусы* OX *и* $O_1У$ *такъ, чтобъ углы зрѣнія* XAO *и* $УBO_1$ *были равны* (фиг. 55).

Рѣш. Умножимъ $\triangle$ XAO на половину и перенесемъ его параллельно въ положеніе $\triangle$ $УCO_1$. Тогда задача приведется къ задачѣ № 1 и точка У опредѣлится проведеніемъ окружности BCO_1.



Фиг. 55.

II.

Поступивъ, какъ сказано, съ фигурою *a*, повернемъ фигуру a_1 около какого нибудь центра вращенія на извѣстный уголъ. Тогда совпадающія или соприкасающіяся части фигуръ *a* и *b* составятъ между собою извѣстный уголъ и тѣмъ же способомъ подбора неизвѣстныхъ и данныхъ мы получимъ новую задачу. Она приведется къ построенію фигуры A по даннымъ частямъ фигуръ *a* и *b* съ помощью обратнаго вращенія, умноженія и перенесенія. Слѣдуетъ замѣтить, что во многихъ случаяхъ можно начать съ умноженія и вращенія, не дѣлая перенесенія. Можетъ также случиться, какъ и показано ниже, что фигура A совпадаетъ съ *a*, а фигура *b* есть повернутая и умноженная фигура A. Что же касается центра вращенія, то онъ можетъ быть взятъ:

α) Въ какой угодно извѣстной вершинѣ, общей фигурамъ *a* и *b*. Поступая, какъ сказано, съ $\triangle$ AOX въ задачѣ № 2, повернемъ его около *O* на уголъ *φ*. Тогда A перейдетъ въ D и получимъ слѣдующую задачу:

3. *Даны точки* D *и* B *и двѣ окружности* O *и* O_1. *Провести радiусы* $O_1У$ *и* OZ *такъ, чтобъ они, пересѣкаясь подъ даннымъ угломъ* *φ*, *давали равные углы зрѣнія* ZDO *и* $УBO_1$ (фиг. 55).

Рѣш. $\triangle$ DZO повернемъ около *O* на уголъ *φ* въ положеніе $\triangle$ AXO; тогда точка D перейдетъ въ извѣстную точку A, а радіусъ OZ—въ положеніи $OX \parallel O_1У$—и задача приведена къ предыдущей*).

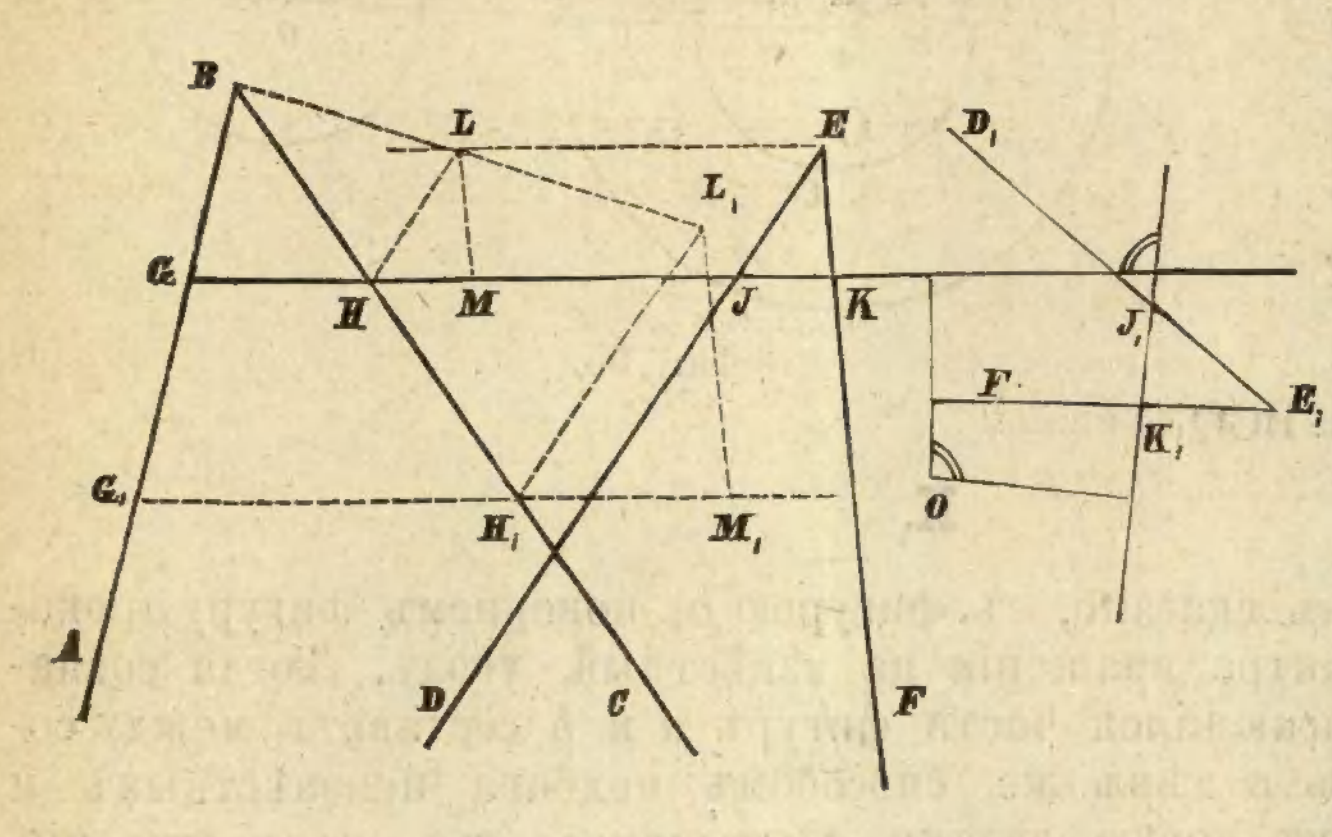
β) Въ какой угодно новой точкѣ, которую надо включить въ условіе задачи. Что эта новая точка есть центръ вращенія, можно маскировать различнымъ образомъ; для этого можно выбрать различныя данныя, скрыто опредѣляющія то обстоятельство, что новая точка есть

*) Совершенно также составлена задача, на которую не получено рѣшенія, см. № 110 „Вѣст. Оп. Физ.“ 1891 г., стр. 38, № 164. За основную была принята довольно трудная задача № 266 изъ книги Ю. Петерсена.

центръ вращенія фигуръ въ основной задачѣ. Для примѣра за основную возьмемъ слѣдующую задачу типа № 2*).

4. *Даны два угла* ABC *и* DEF. *Въ извѣстномъ направленіи провести прямую, отрѣзки которой въ углахъ находятся въ данномъ отношеніи***).

Рѣш. Проведя въ извѣстномъ направленіи произвольную прямую, отложимъ на ней отрѣзки G_1H_1 и H_1M_1 (фиг. 56), находящіеся въ данномъ отношеніи. Затѣмъ проведемъ $H_1L_1 \| DE$, $M_1L_1 \| EF$ и $EL \| G_1H_1$ до пересѣченія съ BL_1 въ точкѣ L: прямая $LH \| ED$ встрѣтитъ BC въ H, такъ что искомая сѣкущая есть GHK.



Фиг. 56.

Назначимъ на чертежѣ произвольный центръ вращенія O и повернемъ $\angle DEF$ около O на извѣстный уголъ φ; тогда $\triangle JEK$ приметъ положеніе $\triangle J_1E_1K_1$, отрѣзки же GH и J_1K_1, имѣя новое опредѣленное направленіе и оставаясь въ томъ же отношеніи, будутъ одинаково отстоять отъ точки O. Поэтому получимъ слѣдующую задачу.

5. *Даны два угла* ABC *и* $D_1E_1F_1$ *и точка* O. *Провести въ каждомъ углѣ по отрѣзку* GH *и* J_1K_1 *такъ, чтобъ отношеніе* $GH:J_1K_1$ *и направленіе каждаго отрѣзка были опредѣленные и чтобъ* GH *и* J_1K_1 *равно отстояли отъ точки* O (фиг. 56).

Рѣш. $\triangle J_1E_1K_1$ повернемъ около O на уголъ, равный углу между данными направленіями. Тогда J_1K_1 и GH составятъ прямую и задача приведена къ предыдущей. Вмѣсто послѣдняго условія можно дать иное, напр., чтобъ равнодѣлящая угла между искомыми отрѣзками проходила черезъ точку O, или, чтобъ отношеніе разстояній тѣхъ же отрѣзковъ отъ точки O было данное. Пусть $p:q$ будетъ это отношеніе. Въ такомъ случаѣ для рѣшенія задачи придется $\triangle J_1E_1K_1$ сначала умножить относительно O на $p:q$, а затѣмъ поступить по прежнему.

γ) Въ одной изъ точекъ, къ опредѣленію которой приводится основная задача. Для опредѣленія этой точки въ новой задачѣ должны быть даны въ той или другой формѣ отношеніе и уголъ вращенія. Рѣшеніе этихъ особенно интересныхъ задачъ начнется съ опредѣленія центра

---

*) Т. е. задачу, полученную предварительнымъ перенесеніемъ по способу I.

**) Помѣщена въ „Вѣстникѣ Оп. Физики“ № 173, 1893 г. стр. 117, фиг. 21, задача № 251, 2 сер.

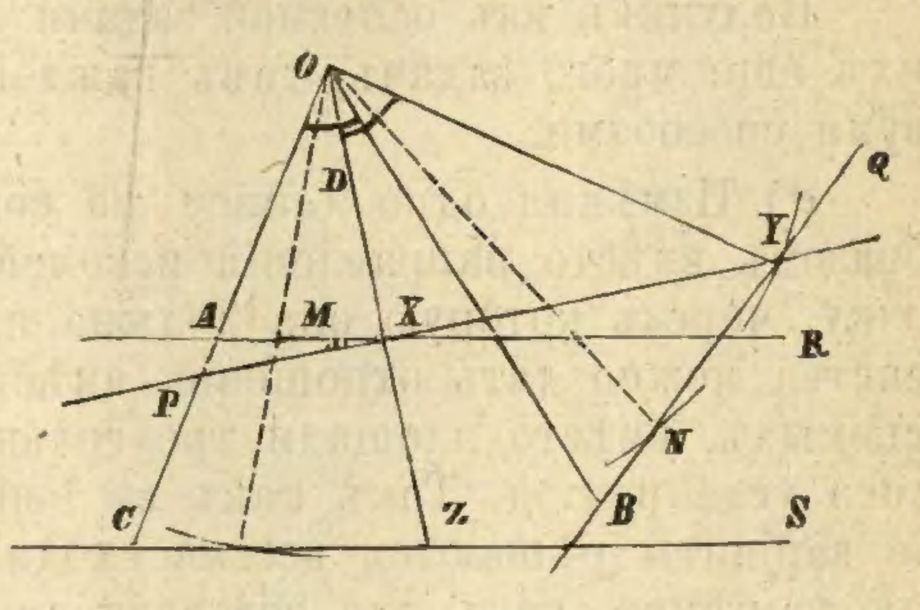
вращенія. Для примѣра возьмемъ за основную слѣдующую очень простую задачу, которая будетъ служить источникомъ для сравнительно очень трудныхъ задачъ.

6. *Даны двѣ параллели и на нихъ по точкѣ* A *и* C. *Провести въ извѣстномъ направленіи сѣкущую* XZ *такъ, чтобъ отношеніе* CZ:AX *было данное* (фиг. 57).

Рѣш. приводится къ опредѣленію точки O, которую легко найти, такъ какъ отношеніе OC:OA извѣстно.

По опредѣленіи точки O останется на прямой AO описать дугу, вмѣщающую извѣстный уголъ AXO.

Повернемъ теперь △ COZ около O на извѣстный уголъ φ; тогда CZ перейдетъ въ BУ, отношеніе CZ:AX останется то же, уголъ между AX и CZ будетъ равенъ φ, а прямая XZ перейдетъ въ положеніе XУ, при чемъ направленіе прямой XУ будетъ тоже извѣстно. Слѣдовательно, получится такая задача:



Фиг. 57.

7. *Даны двѣ прямыя,* AR *и* BQ, *и на нихъ по точкѣ,* A *и* B. *Провести въ извѣстномъ направленіи сѣкущую* XУ *такъ, чтобъ отношеніе* AX:BУ *было данное* (фиг. 57).

Рѣш. Опредѣлимъ центръ вращенія O такъ, чтобъ точки A и B, X и У стали бы соотвѣтственными; данное отношеніе и уголъ φ будутъ отношеніемъ и угломъ вращенія*). Послѣ этого можно перевести BQ въ CS. Изъ подобія △△ AOB и XOУ находимъ, что ∠OXУ = ∠OAB и, такъ какъ ∠∠OAB и AXP извѣстны, то и ∠AXO становится извѣстнымъ. Слѣд., задача приведена къ предыдущей.

Изъ всего сказаннаго можно сдѣлать слѣдующія заключенія. Пусть основная задача даетъ возможность построить фигуру по какимъ либо даннымъ. Преобразовавъ ее цѣликомъ или частью въ новую фигуру съ помощью вращенія, составитель задачи изучаетъ соотношенія между положеніями и частями этихъ фигуръ и разумнымъ выборомъ неизвѣстныхъ и данныхъ всегда можетъ выразить эти соотношенія новой задачей, которая будетъ рѣшаться обратнымъ вращеніемъ. Рѣшающій задачу, предположивъ ее рѣшенной, можетъ идти и большею частью за отсутствіемъ другихъ способовъ долженъ идти обратнымъ путемъ; видя передъ собою измѣненную фигуру, онъ старается дойти до ея первоначальнаго простѣйшаго вида, до ея болѣе или менѣе простого перво-

*) Для опредѣленія точки O надо взять произвольные отрѣзки AM и BN такъ, чтобъ AM:BN было равно данному отношенію, и на прямыхъ AB и MN описать дуги, вмѣщающія уголъ φ. Очевидно, что источникомъ задачъ №№ 7 и 6 можно считать болѣе простую задачу—именно, построеніе △AOX по сторонѣ и 2 угламъ, такъ какъ △△COZ и BOУ могутъ быть изъ него получены умноженіемъ и вращеніемъ. Но начнетъ ли составитель задачи съ △AOX или съ △COZ, разницы въ результатѣ не будетъ.

образа и, если сложная измѣненная фигура получена вращеніемъ, то и находитъ его обратнымъ вращеніемъ. Въ этомъ, какъ мнѣ кажется, тайна могущества метода вращенія. Сейчасъ мы увидимъ, что указанные способъ составленія задачъ и способъ ихъ рѣшенія—способъ исканія первообраза измѣненной фигуры—могутъ быть весьма значительно усилены иными средствами. Нечего и говорить, что, вѣроятно, множество извѣстныхъ задачъ были составлены и рѣшены указанными здѣсь путями. Подтвержденіе этому читатели найдутъ ниже.

Почти все дальнѣйшее относится ко всякимъ геометрическимъ задачамъ, независимо отъ того способа, какимъ онѣ рѣшаются.

III.

Получивъ изъ основной задачи новыя задачи, можно составить изъ нихъ еще много задачъ, давъ каждой задачѣ варіанты. Это дѣлается двумя способами.

б) Измѣняя одно данное на совершенно новое другое. Такимъ образомъ вмѣсто направленія искомой прямой можно дать ея длину или точку, черезъ которую она должна проходить и наоборотъ; вмѣсто равенства можно дать отношеніе, вмѣсто отношенія—сумму или разность искомыхъ, вмѣсто площади треугольника—уголъ и произведеніе боковъ этого угла и т. д. Такъ какъ въ огромномъ большинствѣ случаевъ такіе варіанты рѣшаются весьма сходнымъ образомъ, то указанное одинаково цѣнно, какъ для составителя, такъ и для рѣшающаго задачу.

Указаннымъ измѣненіямъ можно подвергнуть или основную задачу, примѣнивъ къ ней затѣмъ способы I и II, или же можно варіировать непосредственно уже полученныя способами I и II задачи. И въ томъ и въ другомъ случаѣ необходима нѣкоторая осмотрительность, такъ какъ возможенъ слѣдующій случай: варіантъ основной задачи рѣшается циркулемъ и линейкой, а соотвѣтствующій варіантъ задачи, полученной способомъ вращенія, можетъ не разрѣшаться циркулемъ и линейкой. Предположимъ, напримѣръ, что въ основной задачѣ № 6 вмѣсто направленія искомой прямой дана точка D, черезъ которую должна проходить прямая XZ. Тогда получится задача, которая легко рѣшается соединеніемъ точекъ O и D. При повертываніи $\triangle$ COZ прямая XZ принимаетъ положеніе XY, при чемъ точка D перейдетъ въ точку P. Тогда составится слѣдующая весьма извѣстная задача Аполлонія.

8. *Даны двѣ прямыя* AR *и* BQ *и на нихъ по точкѣ* A *и* B. *Черезъ данную точку* P *провести сѣкущую* XY *такъ, чтобъ отношеніе* AX:BY *было данное* (фиг. 57).

Рѣш. совершенно сходно съ рѣшеніемъ задачи № 7 съ той только разницей, что послѣ опредѣленія точки O надо воспользоваться извѣстной величиной не угла AXO, а угла PXO.

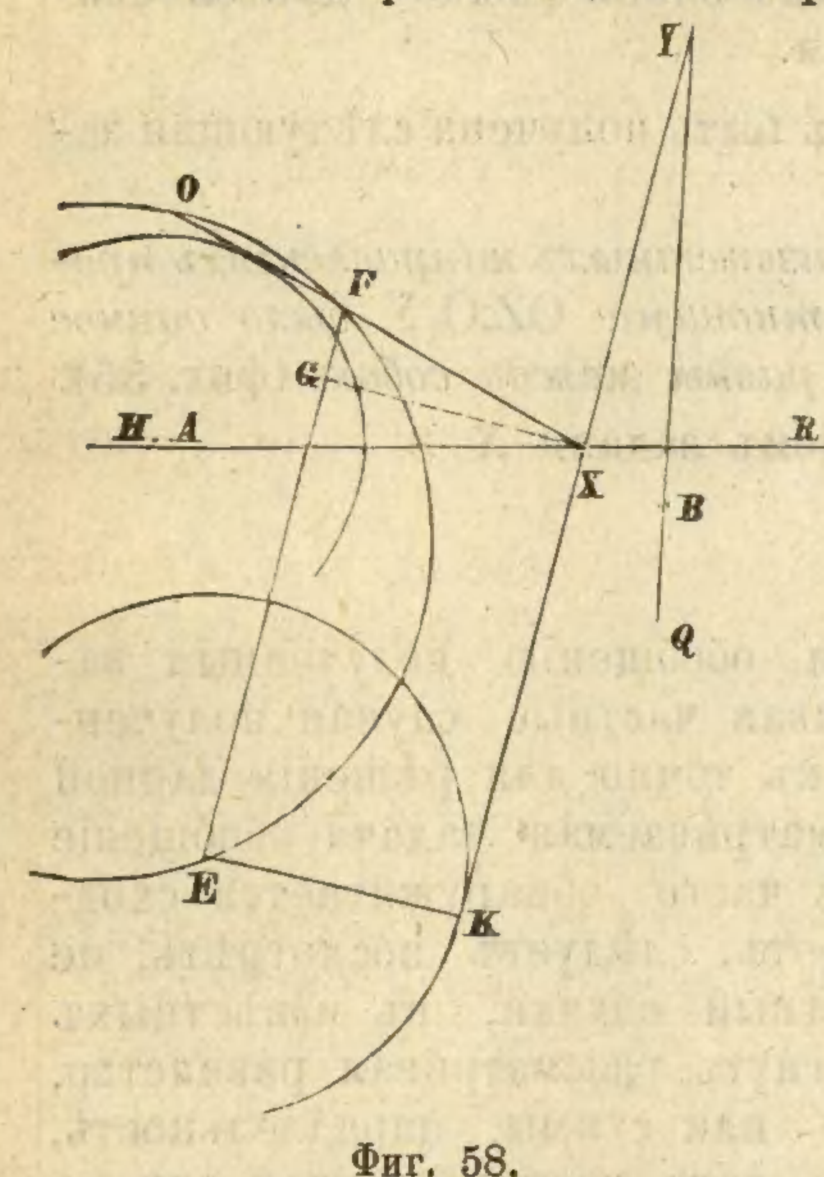
Очевидно также, что, исключивъ совсѣмъ изъ условія задачи точку P, можно дать длину искомой прямой XY, такъ какъ тогда становится извѣстнымъ и размѣръ и форма $\triangle$ XOY, такъ что его легко опредѣлить отдѣльнымъ построеніемъ.

Замѣнимъ теперь въ основной задачѣ № 6 направленіе искомой прямой тѣмъ, что она должна касаться данной окружности H. Варі-

антъ основной задачи будетъ по прежнему легко рѣшаться проведеніемъ изъ O (фиг. 58) касательной. Послѣ вращенія окружность H перейдетъ въ E и задача преобразуется въ слѣдующую:

9. *Даны двѣ прямыя* AR *и* BQ *и на нихъ по точкѣ*, A *и* B. *Провести сѣкущую* XY *такъ, чтобъ отношеніе* AX:BY *было данное и чтобъ сѣкущая касалась данной окружности* E (фиг. 58).

Рѣш. Перенесемъ XY параллельно въ EF. Тогда можно построить $\triangle$ GFX, въ которомъ извѣстны XG и $\angle$ GFX $=$ $\angle$ OXY, а этотъ послѣдній опредѣляется изъ подобія $\triangle\triangle$ AOB и XOY. Послѣ этого сторона FX станетъ извѣстна. Такъ какъ точка F лежитъ на дугѣ, описанной на OE и вмѣщающей извѣстный уголъ EFO=OXK, то задача приведена къ слѣдующей: „даны точка O, прямая AR и окружность OFE. Провести изъ O сѣкущую такъ, чтобъ ея отрѣзокъ между данными прямой и окружностью имѣлъ данную длину“. Если окружность оставимъ въ сторонѣ, то геометрическимъ мѣстомъ точки F будетъ конхоида и, слѣд., задача приводится къ опредѣленію пересѣченія конхоиды съ независящею отъ нея окружностью; поэтому задача вообще не разрѣшается циркулемъ и линейкой.



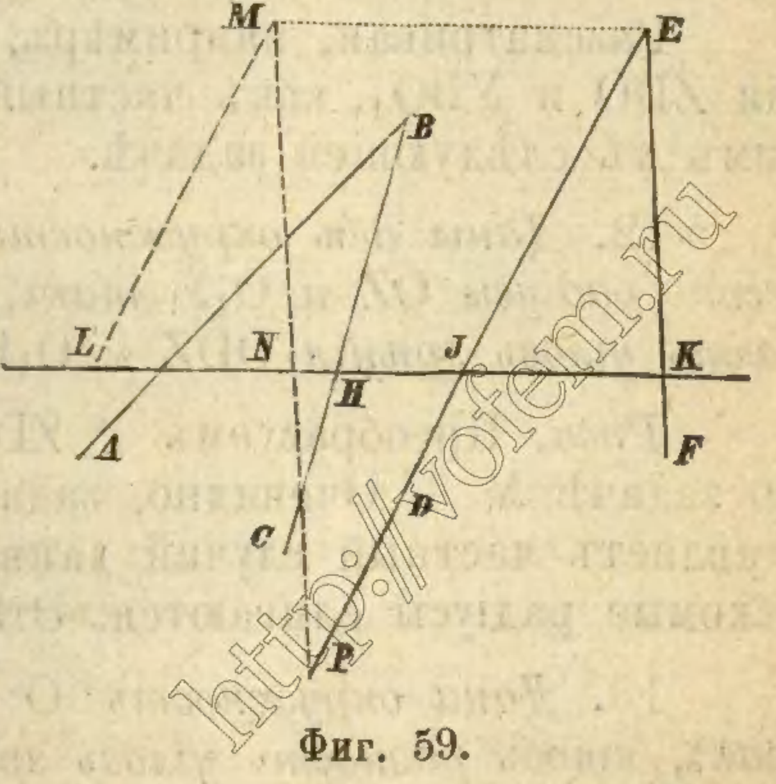
Фиг. 58.

Замѣнимъ еще для примѣра въ задачѣ № 5 отношеніе отрѣзковъ GH и J_1K_1 ихъ суммой или разностью. Тогда выйдетъ слѣдующая задача.

10 *Даны:* $\angle\angle$ ABC *и* $D_1E_1F_1$ *и точка* O. *Провести въ каждомъ углѣ по отрѣзку* GH *и* J_1K_1 *такъ, чтобъ количества* GH$+J_1K_1$, $\angle\angle$ AGH *и* $D_1J_1K_1$ *были опредѣленной величины и чтобъ равнодѣлящая угла между искомыми отрѣзками проходила бы черезъ точку* O (фиг. 56).

Рѣш. Повернемъ $\angle D_1E_1F_1$ около O на уголъ, равный углу между искомыми отрѣзками. Тогда $\angle D_1E_1F_1$ приметъ положеніе DEF и искомые отрѣзки составятъ одну прямую.

Теперь получается соотвѣтствующій варіантъ основной задачи*). Для рѣшенія его перенесемъ параллельно $\triangle$ JEK въ положеніе LMN (фиг. 59) такъ, чтобъ



Фиг. 59.

*) Эти варіанты помѣщены въ „Вѣстникѣ Оп. Физики“ № 173, 1893 г., стр. 118, фиг. 22.

каждая его точка прошла данную длину GH + JK. Тогда GH=NJ и задача приведена къ частному случаю задачи № 4. Рѣшеніе также просто, если вмѣсто суммы дана разность GH—JK.

ε) Включимъ искомыя въ число данныхъ, соотвѣтствующее же число данныхъ сдѣлаемъ искомыми. Такого рода измѣненіе условій задачи даетъ обратную задачу—въ результатѣ можно получить очень много задачъ, но рѣшеніе ихъ сравнительно очень рѣдко удается связать съ рѣшеніемъ первоначальной задачи.

Для примѣра изъ задачи № 3 можетъ быть получена слѣдующая задача.

11. *Даны точки* O, O_1, D *и* B. *Въ извѣстныхъ направленіяхъ провести отрѣзки* OZ *и* O_1У *такъ, чтобъ отношеніе* OZ:O_1У *было данное и чтобъ углы зрѣнія* ODZ *и* O_1BУ *были равны между собою* (фиг. 55).

Рѣш. совершенно сходно съ рѣшеніемъ задачи № 3.

IV.

Можно посмотрѣть, не поддаются ли обобщенію полученныя задачи, и—наоборотъ, нельзя ли, разсматривая частные случаи полученныхъ задачъ, получить новыя задачи. Такъ точно для рѣшенія данной задачи надо посмотрѣть, не есть ли разсматриваемая задача обобщеніе уже извѣстной задачи—въ такомъ случаѣ часто обнаруживается сходство и даже тожество рѣшеній и наоборотъ, слѣдуетъ посмотрѣть, не заключается ли данная задача, какъ частный случай, въ извѣстныхъ задачахъ. Обобщенія задачи можно достигнуть, разсматривая равенство, какъ частный случай отношенія, разности или суммы, параллельность, какъ частный случай наклоненія, прямую, какъ частный случай окружности, одну точку, окружность или прямую, какъ частный случай совпаденія двухъ или нѣсколькихъ точекъ, окружностей или прямыхъ и т. п. Если надо получить частные случаи данной задачи, или если желаемъ найти рѣшеніе данной задачи, начавъ его для простоты съ частнаго случая, то надо идти обратнымъ путемъ.

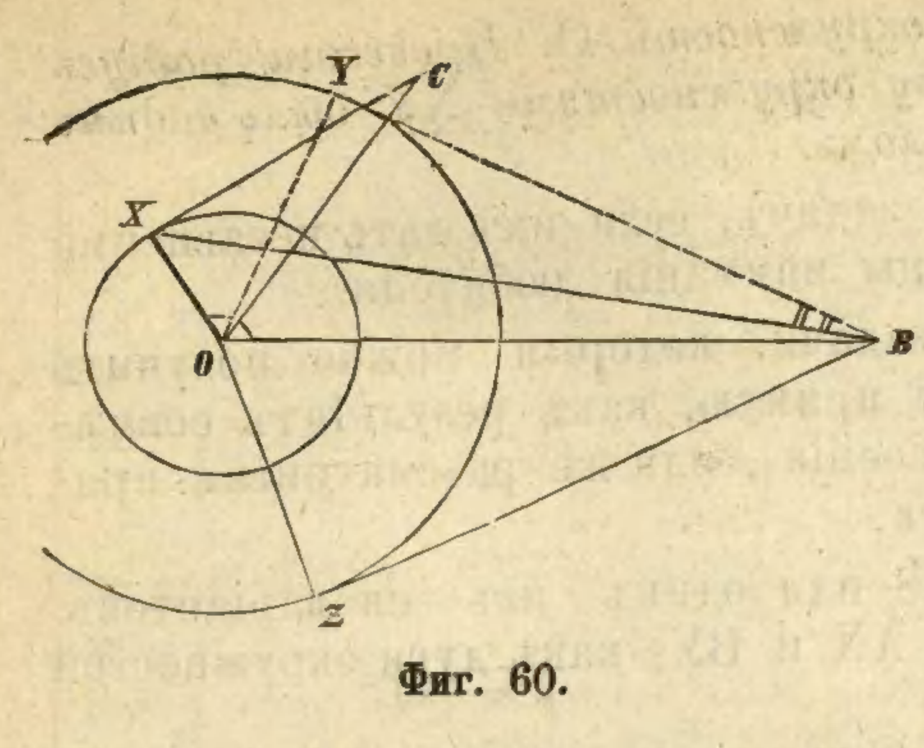
Разсматривая, напримѣръ, въ задачѣ № 3 равенство угловъ зрѣнія ZDO и УBO$_1$, какъ частный случай разности, равной нулю, приходимъ къ слѣдующей задачѣ.

12. *Даны двѣ окружности*, O *и* O_1, *и двѣ точки* D *и* B. *Провести радіусы* OZ *и* O_1У *такъ, чтобъ уголъ между ними, а также разность угловъ зрѣнія* ODZ *и* O_1BУ *были данной величины* (фиг. 55).

Рѣш. Преобразуемъ △ ZDO въ △ CУO_1 совершенно также, какъ въ задачѣ № 3. Очевидно, задача приводится къ задачѣ, которая представляетъ частный случай данной задачи—когда данныя окружности и искомые радіусы сливаются. Эта задача слѣдующая.

13. *Дана окружность* O *и точки* C *и* B. *Провести радіусъ* OX *такъ, чтобъ разность угловъ зрѣнія* XCO *и* XBO *была данная* (фиг. 60).

Рѣш. Сумма угловъ BXC+XCO=COB+XBO, откуда ∠BXC равенъ углу COB безъ данной разности. Слѣд., для рѣшенія задачи надо на прямой BC описать дугу, вмѣщающую уголъ извѣстной вели-



Фиг. 60.

чины*). Болѣе методическое рѣшеніе этой задачи слѣдующее.

Умножимъ △ ОХС на отношеніе ОВ:ОС и повернемъ его около О на ∠СОВ; тогда Х придетъ въ У, С—въ В. △ ХОУ можно опредѣлить отдѣльнымъ построеніемъ, такъ какъ въ немъ извѣстны ОХ, ∠ХОУ = = ∠СОВ и ОУ = ОХ.ОВ:ОС. Такъ какъ точка У лежитъ на окружности извѣстнаго радіуса, то задача приведена къ слѣдующей.

14. *Даны двѣ концентрическія окружности и точка* В. *Найти на нихъ по точкѣ* Х *и* У *такъ, чтобъ длина* ХУ *и уголъ зрѣнія* УВХ *были данной величины.*

Рѣш. уже указано; но есть иное рѣшеніе способомъ вращенія—найти его предоставляемъ читателямъ. Представимъ себѣ, что точки А и В въ задачахъ № 2 и № 3, также какъ точки D и В въ задачѣ № 12, совпадаютъ; тогда получимъ слѣдующія четыре задачи, которыя рѣшаются совершенно тѣмъ же способомъ.

15. *Въ окружностяхъ* О *и* O_1 *провести параллельные радіусы* ОХ *и* O_1У *такъ, чтобъ они были видны изъ данной точки* А *подъ равными углами.*

16. *Въ окружностяхъ* О *и* O_1 *провести параллельные радіусы* ОХ *и* O_1У *такъ, чтобъ разность угловъ зрѣнія, подъ которыми радіусы* ОХ *и* O_1У *видны изъ данной точки* А, *была данной величины.*

17. *Даны окружности* О *и* O_1 *и точка* А. *Провести два радіуса* OZ *и* O_1У *такъ, чтобъ уголъ между ними былъ данной величины и углы зрѣнія* OAZ *и* O_1АУ *были равны между собой.*

18. *Даны окружности* О *и* O_1 *и точка* А. *Провести два радіуса* OZ *и* O_1У *такъ, чтобъ уголъ между ними и разность угловъ* OAZ *и* O_1АУ *имѣли данную величину.*

Такъ какъ двѣ окружности въ частномъ случаѣ могутъ или совпадать, или сдѣлаться концентрическими, то изъ полученныхъ задачъ можно составить еще не мало задачъ.

Изъ нихъ укажемъ слѣдующія двѣ.

19. *Даны двѣ концентрическія окружности* О *и точки* А *и* В. *Провести радіусъ* ОХУ, *такъ, чтобъ разность угловъ зрѣнія* ОАХ *и* ОВУ *была данная.*

*) Задачи №№ 12 и 13 можно разсматривать, какъ варіантъ задачъ №№ 3 и 1. Вообще всѣ задачи, получаемыя способомъ IV-мъ, можно разсматривать какъ варіанты другихъ задачъ, но только это варіанты не случайные, а имѣющіе свое логическое raison d'être для циркуля и линейки. Между прочимъ автору не удалось рѣшить варіантъ задачи № 13, въ которой разность угловъ замѣнена ихъ суммой. Очевидно, для рѣшенія этого варіанта надо △ УОВ повернуть въ положеніе △ ZOB (фиг. 07) и первообразъ задачи надо искать не вращеніемъ, а обращеніемъ хотя, конечно, это не есть основаніе думать о неразрѣшимости задачи.

20. *Даны двѣ концентрическія окружности* O. *Провести радіусъ* OXY *такъ, чтобъ его отрѣзокъ между окружностями* XY *былъ видѣнъ изъ данной точки* A *подъ даннымъ угломъ.*

Большинство изъ послѣднихъ 6 задачъ, если ихъ дать независимо отъ ихъ общаго типа, вполнѣ достойны вниманія любителя.

Однако гораздо замѣчательнѣе задачи, которыя можно получить изъ предыдущихъ, разсматривая одну прямую, какъ результатъ совмѣщенія двухъ прямыхъ (способъ раздвоенія), или же разсматривая прямую, какъ частный случай окружности.

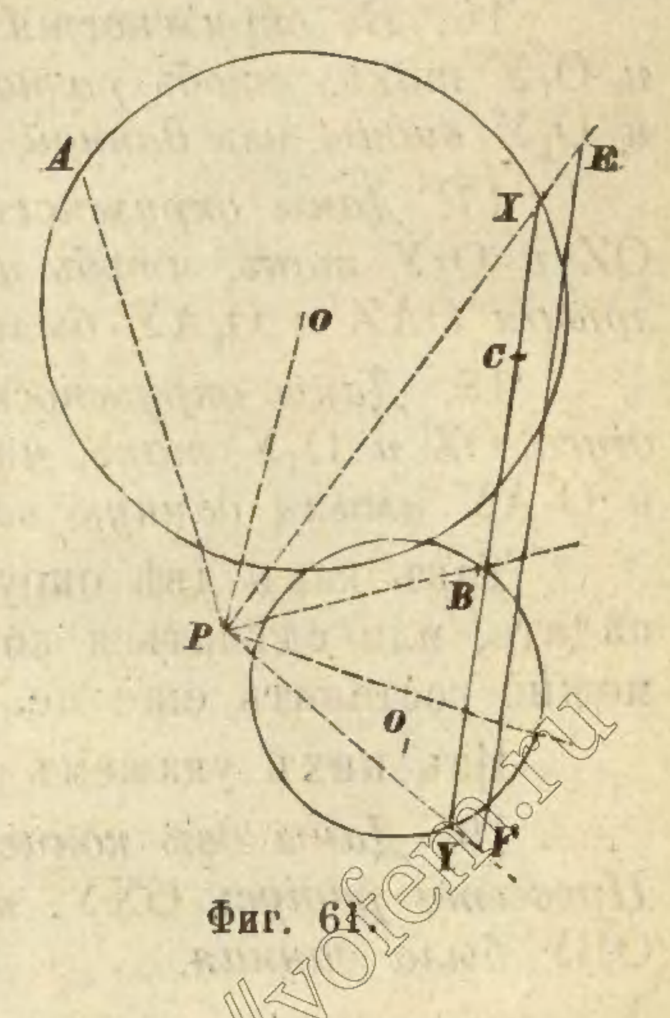
Возьмемъ задачу Аполлонія № 8 или одинъ изъ ея варіантовъ. Будемъ разсматривать въ ней прямыя AX и BY_1 какъ дуги окружностей даннаго радіуса*).

Такъ какъ отношеніе отрѣзковъ AX:BY равно отношенію вращенія, а въ окружностяхъ отношеніе вращенія равно отношенію радіусовъ, то въ такомъ случаѣ длины дугъ AX и BY должны быть пропорціональны радіусамъ, а это значитъ, что дуги AX и BY должны быть подобны. Такимъ образомъ, задача Аполлонія должна быть частнымъ случаемъ слѣдующей задачи, для которой вполнѣ естественно **) ожидать сходнаго рѣшенія.

21. *Даны двѣ окружности,* O *и* O_1, *и на нихъ по точкѣ* A *и* B. *Черезъ данную точку* C *провести сѣкущую* XY *такъ, чтобъ дуги* AX *и* BY *имѣли одинаковое число градусовъ* (фиг. 61).

Рѣш. оказывается, дѣйствительно, совершенно сходное. Опредѣлимъ центръ вращенія P такъ, чтобъ при совмѣщеніи окружности O съ окружностью O_1 точки A и X пришли въ B и Y ***). Тогда $\triangle XPY \infty \triangle APB$ и для опредѣленія точки X на прямой PC достаточно описать дугу, вмѣщающую уголъ, равный углу PAB.

Въ соотвѣтствіи съ задачей Аполлонія эта задача приметъ два варіанта съ тѣми же рѣшеніями.



Фиг. 61.

22. *Даны окружности* O *и* O_1 *и на нихъ по точкѣ* A *и* B. *Въ извѣстномъ направленіи провести сѣкущую* XY *такъ, чтобъ дуги* AX *и* BY *были подобны.*

Рѣш. Изъ P придется провести двѣ прямыя PX и PY, которыя встрѣчаютъ данную прямую FE подъ извѣстными углами.

---

*) Уголъ между прямыми замѣнится угломъ пересѣченія окружностей. Этотъ уголъ равенъ углу между касательными, проведенными въ соотвѣтственныхъ точкахъ A и B, или углу между радіусами AO и BO_1.

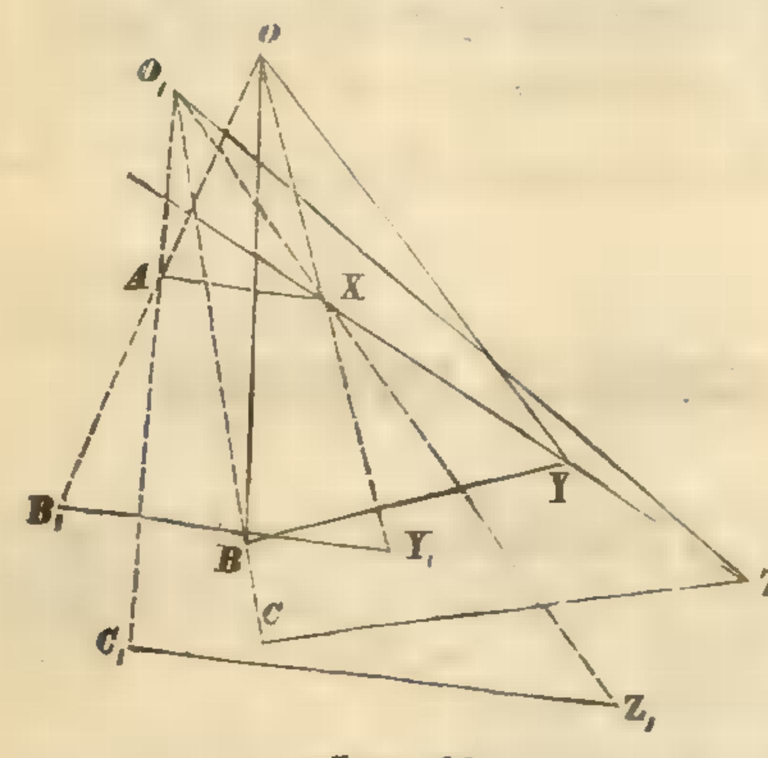
**) Это относится только къ задачамъ на вращеніе. Въ самомъ дѣлѣ, если данныя прямыя замѣнены окружностями, то въ рѣшеніи не должно выйти разницы, такъ какъ части этихъ прямыхъ будутъ хордами окружностей и вращеніе послѣднихъ замѣнится вращеніемъ хордъ.

***) Для этого надо взять два равныхъ центральныхъ угла AOM и BO_1N, затѣмъ на прямыхъ AB и MN описать дуги, вмѣщающія уголъ, равный углу вращенія.

23. *Даны окружности* O *и* O_1 *и на нихъ по точкѣ* A *и* B. *Найти на нихъ по точкѣ* X *и* У *такъ, чтобъ дуги* AX *и* BУ *были подобны и длина* XУ *была данная.*

Рѣш. Такъ какъ въ △ XPУ извѣстны сторона и два угла, то легко его построить отдѣльно и опредѣлить длину PX.

Въ той же задачѣ Аполлонія № 8 раздвоимъ одну изъ прямыхъ, напр., AX, т. е. представимъ себѣ ее, какъ результатъ совмѣщенія ея съ другой прямой CZ (фиг. 62).



Фиг. 62.

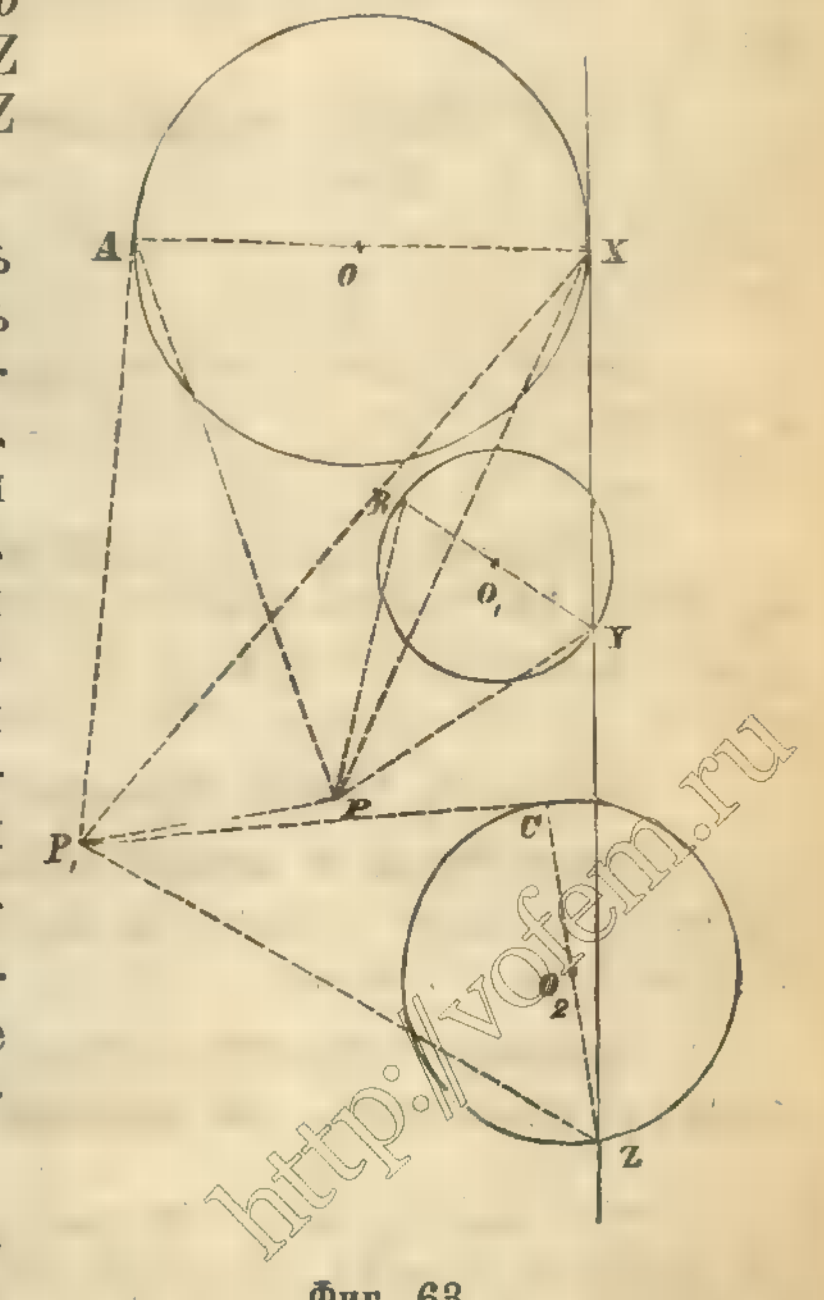
Положимъ, что точки A, B и C постоянныя и что новый центръ вращенія не совпадаетъ съ прежнимъ.

Тогда уголъ между AX и CZ и отношеніе AX:CZ станутъ новые, неравные углу и отношенію AX и BУ.

Если при этомъ центръ вращенія подобранъ такъ, что точки X, У и Z расположатся на одной прямой, то, очевидно, точка, черезъ которую должна проходить прямая XУ, останется въ сторонѣ и потому должна быть исключена изъ условія задачи. Такимъ путемъ приходимъ къ слѣдующимъ замѣчательнымъ двумъ задачамъ*).

24. *Даны три прямыя и на нихъ по точкѣ* A, B *и* C. *Провести сѣкущую* XYZ *такъ, чтобъ отношенія* AX, BУ *и* CZ *были данныя* (фиг. 62).

Рѣш. Стараясь отыскать первообразъ задачи, посмотримъ нельзя ли совмѣстить CZ съ AX и BУ съ AX. Для этого опредѣлимъ центры вращенія O и O_1 такъ. чтобъ при вращеніи точки A и B, X и У, A и C, X и Z были соотвѣтственными. Въ такомъ случаѣ ∠ OXУ = ∠ OAB и ∠ O_1XZ = ∠ O_1AC. Слѣд., извѣстна разность этихъ угловъ, т. е. ∠ OXO_1, и для рѣшенія задачи нужно описать на прямой OO_1 дугу, вмѣщающую извѣстный уголъ. Опредѣливъ X, легко найти У и Z.



Фиг. 63.

Наконецъ, раздвоивъ одну окружность на двѣ въ задачѣ № 21, или же обобщая задачу № 24, получимъ слѣдующую задачу.

25. *Даны три окружности и на нихъ по точкѣ* A, B *и* C. *Провести къ*

*) Задачи №№ 1 и 6 общеизвѣстны, №№ 4, 8, 15, 21, 22, 23 встрѣчаются въ литературѣ, остальныя, насколько мнѣ извѣстно, принадлежатъ автору; онѣ созданы и рѣшены именно тѣми путями, которые только что описаны.

нимъ сѣкущую XYZ такъ, чтобъ дуги AX, BY и CZ были подобны.

Рѣш. Совмѣщая всѣ три дуги, получимъ центры вращенія P и P_1 и уголъ PXP, станетъ извѣстнымъ, какъ въ предыдущей задачѣ (фиг. 63)*).

Мы видѣли, что задача Аполлонія возникла изъ построенія треугольника по данной сторонѣ и двумъ угламъ. Такимъ образомъ двѣ послѣднія задачи въ сущности тождественны съ построеніемъ треугольника по сторонѣ и двумъ угламъ. Кто бы могъ это подумать съ перваго взгляда? По истинѣ для всякаго дѣла довольно простоты.

И. Александровъ (Тамбовъ).

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Вейерштрассъ. Къ мемуару Линдеманна „О Лудольфовомъ числѣ" (доказательство невозможности квадратуры круга). Переводъ съ дополненіями *И. Л. Скалозубова* подъ редакціею проф. *А. В. Васильева.* Изданіе физико-математическаго общества. Казань. 1894. Ц. 30 к.

Hauptresultate der Untersuchungen über die elektrischen Erdströme in Bulgarien. Von *P. Bachmetjew.* Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1894. Nr. 4.

О главнѣйшихъ физическихъ свойствахъ воздуха. Общедоступная лекція *О. Я. Пергамента*, прочитанная въ Одесской Городской Аудиторіи для Народныхъ Чтеній. Изданіе Одесской Городской Аудиторіи для Народныхъ Чтеній. Одесса. 1895. Ц. 6 к.

Сборникъ примѣровъ и задачъ для усвоенія метрической системы мѣръ и вѣсовъ. Составилъ *В. Гебель.* Изданіе книжнаго магазина В. В. Думнова. Москва. 1895. Ц. 10 к.

Палецъ-Календарь. Простой способъ вѣрнаго опредѣленія какого угодно числа въ какомъ угодно году. Оригинально написанъ на международномъ языкѣ эсперанто частнымъ учителемъ *Яковомъ Грономъ.* Изданіе И. Л. П. Одесса. 1894. Ц. 5 к.

Опыты съ токами большой частоты. *Н. Слугинова.* Спб.

Гельмгольцъ и современная физика. Рѣчь, читанная въ засѣданіи Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи 16 ноября 1894 г. Проф. *А. Г. Столѣтовымъ.* Москва. 1895.

Сборникъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе, съ прибавленіемъ задачъ, рѣшаемыхъ при помощи тригонометріи. Курсъ среднихъ учебныхъ

*) Конечно можно идти еще дальше въ варіаціяхъ тѣхъ же задачъ, но авторъ не гнался за числомъ варіантовъ; при томъ вообще уже не получается должнаго изящества. Въ предыдущихъ примѣрахъ обобщены данныя, но можно обобщить искомыя. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ рѣшеніе, хотя и должно получиться съ помощью обратнаго упрощенія (т. е. вращенія), но можетъ существенно отличаться отъ первоначальнаго. Нѣкоторые изъ такого рода варіантовъ задачи Аполлонія (№ 8) отосланы авторомъ въ отдѣлъ задачъ „Вѣстника Оп. Физики".

заведеній. Составилъ *А. Воиновъ*, преподаватель Харьковской 3-й гимназіи. Москва. 1895. Ц. 65 к.

Указатель русской литературы по математикѣ, чистымъ и прикладнымъ естественнымъ наукамъ за 1891 г., издаваемый Кіевскимъ Обществомъ Естествоиспытателей подъ редакціей *В. К. Савинскаго*. Годъ двадцатый. Кіевъ. 1894. Ц. 4 р. с.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ 18$^{93}/_{94}$ Г.

Варшавскій Учебный Округъ.

Варшавское реальное училище.

Въ VI классѣ. *По ариѳметикѣ* (основная). Купецъ желалъ составить 0,875 пуда смѣшаннаго чаю изъ двухъ сортовъ: фунтъ перваго сорта стоитъ столько, какъ великъ коммерческій учетъ векселя въ 250 руб. по 8% за $1^1/_2$ мѣсяца до срока, а цѣна 1-го фунта второго сорта равна математическому учету векселя въ 103,2 руб., который слѣдуетъ продать за 9 мѣс. до срока по 4,2(6)%. Сколько онъ долженъ взять каждаго сорта чаю, чтобы, продавая 1 фунтъ смѣси по 3,5 руб., получить 25% прибыли?

По ариѳметикѣ (запасная). Три брата должны были раздѣлить между собою обратно-пропорціонально ихъ возрасту сумму денегъ, полученную отъ продажи векселя за 1 годъ 4 мѣсяца до срока съ коммерческимъ учетомъ по 4,5%. Если бы сдѣлать математическій учетъ съ этого векселя по $5^1/_3$% за 10 мѣсяцевъ до срока и коммерческій учетъ съ того же векселя по 6% за 8 мѣсяцевъ до срока, то разность таковыхъ учетовъ была бы равна 90 руб. Сколько денегъ получилъ каждый изъ братьевъ, если возрастъ средняго относился къ возрасту старшаго, какъ 0,(6):0,8(3), и возрастъ младшаго составляетъ $27^1/_{37}$% возраста всѣхъ трехъ братьевъ вмѣстѣ?

По геометріи (основныя). 1. Полная поверхность прямого кругового конуса составляетъ $^3/_{128}$ поверхности шара, радіусъ котораго равенъ периметру сѣченія конуса плоскостью, проведенною черезъ его ось; площадь же этого сѣченія конуса заключаетъ 588 кв. дюймовъ. Опредѣлить радіусъ основанія и образующую конуса.

2. Въ данный треугольникъ вписать ромбъ съ угломъ въ 72°.

По геометріи (запасныя). 1. Треугольникъ вращается около прямой, соединяющей средины двухъ сторонъ его. Опредѣлить отношеніе объемовъ, происшедшихъ отъ вращенія тѣхъ частей треугольника, на которыя онъ разбивается осью вращенія.

2. Въ треугольникъ вписать параллелограммъ, имѣющій съ нимъ одинъ общій уголъ, и стороны котораго находятся въ отношеніи $m:n$.

По тригонометріи (основная). Периметръ треугольника $2p=299,272$ фута, одна изъ его сторонъ $a=72,349$ фута и уголъ $B=26°55'46''$. Рѣшить треугольникъ.

По тригонометріи (запасная). Рѣшить треугольникъ, въ которомъ основаніе $b=39$ футамъ, соотвѣтствующая ему высота $h=133,846$ фута, а разность угловъ, прилежащихъ къ основанію равна $57°55'13''$.

По алгебрѣ (основныя). 1. Изъ куска чугуна вылито нѣсколько ядеръ равнаго вѣса и нѣсколько котловъ тоже равныхъ по вѣсу. Если бы вѣсъ каждаго ядра, выраженный въ фунтахъ, былъ на 2 меньше числа сдѣланныхъ котловъ, а вѣсъ каждаго котла на 2 фунта больше числа сдѣланныхъ ядеръ, то общій ихъ вѣсъ превышалъ бы удвоенную разность числа котловъ и ядеръ на 800 фунт.; а если бы вѣсъ каждаго предмета въ фунтахъ былъ равенъ числу сдѣланныхъ предметовъ того же рода, то общій ихъ вѣсъ равнялся бы 881 фунту. Сколько было сдѣлано ядеръ и котловъ?

2. Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=8^9/_{11},$$

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=6^7/_{11}.$$

По алгебрѣ (запасныя). 1. Дробь:

$$\frac{12x^4+2x^3+16x^2+2x+2}{12x^3+2x^2+10x+1},$$

разложена въ непрерывную и составлены всѣ ея подходящія дроби. Число, равное числителю предпослѣдней подходящей дроби при $x=5$, требуется разложить на такія двѣ части, чтобы первая была кратнымъ 107, а вторая при дѣленіи на 111 давала бы въ остаткѣ 3.

2. Опредѣлить x и y изъ уравненій:

$$1)\ \sqrt{(1+x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}=4.$$

$$2)\ (4-x^2)^2=18-4y^2.$$

Въ дополнительномъ классѣ. *По алгебрѣ.* Въ кругъ даннаго радіуса R вписанъ шестиугольникъ, состоящій изъ двухъ равныхъ равнобедренныхъ трапецій, сложенныхъ вмѣстѣ большими основаніями; найти maximum объема тѣла, получающагося при вращеніи этого шестиугольника около меньшаго основанія одной изъ составляющихъ его трапецій.

По приложенію алгебры къ геометріи. Въ кругъ даннаго радіуса R вписать прямоугольникъ, котораго периметръ равнялся бы $4p$, гдѣ p данная линія.

Сообщ. *С. Гирманъ.*

ЗАДАЧИ.

№ 144. Даны двѣ окружности O и O_1 и на нихъ по точкѣ A и B. Изъ даннаго центра O_2 провести окружность, пересѣкающую данныя окружности въ точкахъ X и $У$ такъ, что дуги AX и $BУ$ имѣютъ одинаковое число градусовъ.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 145. Даны двѣ прямыя и на нихъ по точкѣ A и B. Изъ даннаго центра описать окружность, встрѣчающую данныя прямыя въ X и Y такъ, чтобъ отношеніе $AX:BY$ было данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 146. Въ треугольникъ ABC вписана окружность, точки касанія которой суть M, N и P. Въ треугольникѣ MNP проведены высоты, основанія которыхъ суть X, Y и Z.—Доказать, что треугольникъ XYZ подобенъ треугольнику ABC и по даннымъ сторонамъ треугольника ABC вычислить стороны и площадь треугольника XYZ.

Н. Николаевъ (Пенза).

147. Сто монетъ, состоящихъ изъ франковъ, марокъ и гульденовъ, по курсу размѣняли на русскія деньги, причемъ было получено 56 р. 25 к. Сколько было франковъ, марокъ и гульденовъ, если извѣстно, что гульденовъ было на 8 штукъ больше, чѣмъ марокъ и что по курсу франкъ стоитъ $37\frac{1}{2}$ к., марка 45 к., а гульденъ 75 к.

NB. Рѣшеніе требуется чисто ариѳметическое.

(Заимств.). *Р. Хмѣлевскій* (Полтава).

№ 148. Опредѣлить для n цѣлаго сумму ряда:

$$1^2+n^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\cdots$$

А. Варенцовъ (Шуя).

№ 149. Трапецоэдръ есть многогранникъ, ограниченный 24 равными четыреугольниками (трапецоидами). Въ каждомъ четыреугольникѣ три острые угла равны между собою и равны α; стороны, заключающія четвертый уголъ, равны между собою; остальныя двѣ стороны также равны между собою и равны a. Опредѣлить длины прямыхъ, соединяющихъ вершины противоположныхъ трегранныхъ и четырегранныхъ угловъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 19 (3 сер.). Сколько было у меня въ корзинѣ яблокъ, если первому изъ трехъ своихъ сыновей я отдалъ половину всѣхъ яблокъ и еще половину одного яблока, второму—половину оставшихся и еще половину одного яблока, третьему—половину оставшихся и еще половину одного яблока, послѣ чего у меня осталось четыре яблока и ни одного яблока при дѣлежѣ мнѣ не пришлось разрѣзать?—Рѣшить задачу, если неизвѣстно число оставшихся яблокъ. Обобщить для n дѣтей.

Рѣшимъ сперва задачу въ общемъ видѣ. Пусть яблокъ было x, дѣтей n. Первый сынъ получитъ $\frac{x+1}{2}$, второй $\frac{x+1}{4}$, третій $\frac{x+1}{8}$. Легко показать, что если m-ый получитъ $\frac{x+1}{2^m}$, то $(m+1)$-ый получитъ $\frac{x+1}{2^{m+1}}$. Дѣйствительно, по условію m первыхъ дѣтей получатъ

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{x+1}{2^k} = x+1-\frac{x+1}{2^m},$$

слѣдовательно $(m+1)$-му придется

$$\frac{x-\left[x+1-\frac{x+1}{2^m}\right]+1}{2}=\frac{x+1}{2^{m+1}}.$$

Итакъ n-ый сынъ получитъ $\frac{x+1}{2^n}$ яблокъ.

Такъ какъ ни одного яблока не приходилось дѣлить, то числа

$$\frac{x+1}{2}, \frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{8}, \ldots \frac{x+1}{2^n}$$

должны быть цѣлыми. Для этого достаточно, чтобы $x+1$ дѣлилось на 2^n, а потому

$$x=2^n p-1,$$

гдѣ p есть любое цѣлое число.

Въ данномъ частномъ случаѣ, когда $n=3$ и остатокъ равенъ 4, число x опредѣляется изъ уравненія:

$$x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}-\frac{x+1}{8}=4, \text{ откуда } x=39.$$

Задача можетъ быть рѣшена и такъ. До того, какъ 3-й сынъ получилъ половину яблока, остатокъ былъ $4^1/_2$, слѣдовательно послѣ того, какъ была отдана 2-му сыну его доля, остатокъ былъ 9, т. е. 3-ій получилъ 5 яблокъ. До полученія 2-мъ половины яблока остатокъ былъ $9^1/_2$, т. е. послѣ того, какъ былъ надѣленъ 1-ый, осталось 19 яблокъ, слѣдовательно 2-й получилъ $9^1/_2+{}^1/_2=10$ яблокъ, а первый $19^1/_2+{}^1/_2==20$ яблокъ. Потому всего яблокъ было $20+10+5+4=39$.

Если неизвѣстно число оставшихся яблокъ, то, называя его черезъ y, легко составимъ уравненіе:

$$\frac{x-7}{8}=y, \text{ откуда } x=8y+7;$$

полагая здѣсь

$$y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots.$$

найдемъ $$x = 7, 15, 23, 31, 39, 47 \ldots.$$

А. Прислова (Ревель); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *К.* и *Θ.* (Тамбовъ); *В. Рюминъ* (Николаевъ); *С. Д—цевъ* (Москва); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *С. Окуличъ* (Варшава); *Л. Беркманъ* (Бѣлостокъ); *К. Зновицкій* (Кіевъ); *О. Ривошъ* (Вильно); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *П. Ивановъ* (Одесса); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ).

№ 20 (3 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе:

$$x^{2x^3+3y^3} = (10x + y)^{x^3+3y^3}.$$

Изъ даннаго уравненія имѣемъ:

$$x^{x^3} = (10 + {}^{y}/_{x})^{x^3+3y^3}.$$

Чтобы рѣшеніе было возможно въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, необходимо положить

$$y = mx,$$

гдѣ m есть цѣлое и положительное число. Тогда

$$x = (10 + m)^{3m^3+1},$$

$$y = m(10 + m)^{3m^3+1}.$$

С. Окуличъ (Варшава); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *М. Прясловъ* (Ревель); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 26 (3 сер.). Двое часовъ A и B бьютъ одновременно и пробили 19 разъ. Опредѣлить часъ, который они показывали, зная, что часы A отстаютъ отъ B на 2 секунды и промежутокъ между двумя ударами часовъ A равенъ 3 секундамъ, а часовъ B—4 секундамъ. Одинаковыхъ ударовъ совпалъ лишь одинъ.

Пусть совпали n-е удары. Тогда до совпаденія часы A били впродолженіе $(n-1)\,3$ секундъ, а часы B впродолженіе $(n-1)\,4$ секундъ. Но такъ какъ часы A отстаютъ отъ B на 2 секунды, то

$$(n-1)\,4-(n-1)\,3 = 2, \text{ откуда } n = 3.$$

Послѣ третьяго удара совпаденія очевидно происходятъ черезъ каждые 12 секундъ. Часы A бьютъ за это время 4 раза, часы B—три раза. Очевидно также, что такихъ совпаденій было два ($5+2\times6+2=$ $=19$). Поэтому въ дѣйствительности ударовъ было:

$$6+2\times7+2 = 22,$$

т. е. часы показывали 11 час.

К. Зновицкій (Кіевъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *К.* и *Θ.* (Тамбовъ).

№ 426 (2 сер.). Даны два правильныхъ многоугольника: одинъ объ m, другой объ n сторонахъ. Требуется построить правильный мно-

гоугольникъ объ mn сторонахъ, предполагая числа m и n взаимно простыми.

При m и n взаимно простыхъ уравненіе

$$mx - ny = 1$$

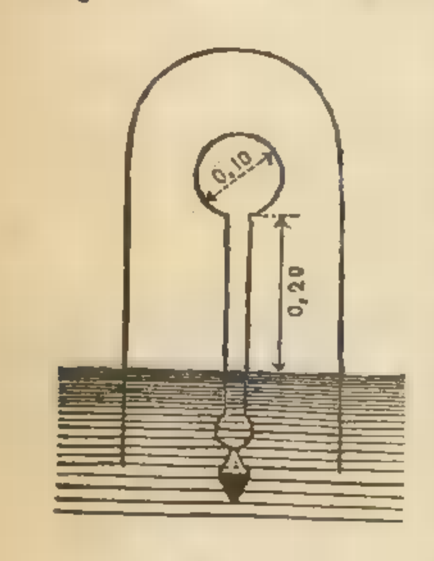
всегда можетъ быть удовлетворено цѣлыми положительными значеніями x и y. Пусть x_1 и y_1 будутъ два такихъ значенія. Помноживъ обѣ части равенства $mx_1 - ny_1 = 1$ на $\frac{4d}{mn}$, гдѣ d прямой уголъ, получимъ

$$\frac{4d}{n}x_1 - \frac{4d}{m}y_1 = \frac{4d}{mn},$$

откуда видимъ, что центральный уголъ правильнаго многоугольника объ mn сторонахъ получимъ, отнявъ повторенный y_1 разъ центральный уголъ даннаго m-угольника изъ повтореннаго x_1 разъ центральнаго угла даннаго n-угольника. Построивъ такимъ образомъ центральный уголъ правильнаго многоугольника объ mn стронахъ, легко построить и самый многоугольникъ.

NB. Ни одного удовлетворительнаго рѣшенія.

№ 490 (2 сер.). Ареометръ, трубка котораго заканчивается сверху стекляннымъ шарикомъ (фиг. 64) діаметра 0,1 m, плавающій въ сосудѣ съ сѣрной кислотой плотности 1,8, покрытъ колоколомъ. Высота трубки надъ уровнемъ жидкости равна 0,2 m, а температура равна 0°. Находящійся подъ колоколомъ воздухъ замѣщаютъ углекислотой (плотность ея = 1,52), сохраняя прежнія условія температуры и давленія. Спрашивается, на сколько перемѣстится ареометръ.



фиг. 64.

Наполненный углекислотою колоколъ нагрѣваютъ до 80°, сохраняя прежнее давленіе. Какъ и на сколько перемѣстится приборъ?

Сѣченіе трубки равно 1 mmq, атмосферное давленіе = 0,750 m. Капиллярныя явленія, расширеніе стекла и сѣрной кислоты въ разсчетъ не принимаются,

Пусть v объемъ погруженной въ сѣрную кислоту части ареометра, когда подъ колоколомъ находится воздухъ, а x число центиметровъ, на которое подымается приборъ, когда воздухъ замѣщаютъ болѣе тяжелой углекислотой. Называя черезъ P вѣсъ ареометра, очевидно получимъ:

$$P = 1,8v + ({}^1/_6\pi.10^3 + 0,01 \times 20) \times 0,001293; \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$P = (v - 0,01x) \times 1,8 + [{}^1/_6\pi 10^3 + 0,01(20 + x)] \times 0,001293 \times 1,52, \; . \; (2)$$

гдѣ 0,001293 есть вѣсъ 1 cc воздуха.

Приравнивая другъ другу вторыя части уравненій (1) и (2) и опредѣляя изъ полученнаго уравненія x, найдемъ

$$x = \frac{(3141,6 - 1,2) \times 0,52 \times 0,001293}{0,06(1,8 - 0,001293 \times 1,52)} = 19,5 \text{ cm}.$$

При нагрѣваніи заключенной подъ колоколомъ углекислоты до 80° при постоянномъ давленіи плотность ея уменьшается до

$$\frac{1{,}52}{1+0{,}00367\times 80}=1{,}17$$

и ареометръ погружается на y cm. Называя черезъ v' объемъ погруженной части ареометра, когда температура углекислоты равна 0°, получимъ

$$P=1{,}8v'+(\tfrac{1}{6}\pi 10^3+0{,}01\times 39{,}5)\times 0{,}001293\times 1{,}52, \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

$$P=(v'+0{,}01y)\times 1{,}8+[\tfrac{1}{6}\pi 10^3+0{,}01(39{,}5-y)]\times 0{,}001293\times 1{,}17. \; . \; (4)$$

Изъ уравненій (3) и (4) найдемъ

$$y=\frac{(3141{,}6-2{,}37)\,(1{,}52-1{.}17)\times 0{,}001293}{0{,}06(1{,}8-0{,}001293\times 1{,}17)}=13 \text{ cm.}$$

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону).

№ 586 (2 сер.). Черезъ данную точку K, лежащую внутри даннаго круга, провести хорду MN такъ, чтобы часть ея MK равнялась отрѣзку ея отъ точки K до основанія P перпендикуляра, опущеннаго на MN изъ центра круга. При какихъ условіяхъ возможна задача?

NB. Рѣшеніе требуется геометрическое.

Соединивъ точку K съ центромъ O даннаго круга, продолжаемъ прямую OK за точку K на разстояніе KL, равное OK. На линіи KL описываемъ какъ на діаметрѣ окружность, которая пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ M и M'. Соединивъ эти точки съ точкою K, получимъ двѣ равныя хорды MN и $M'N'$, удовлетворяющія, что легко доказать, условіямъ задачи.

Изъ этого построенія слѣдуетъ, что задача возможна, когда $OK \geqq R/2$.

В. Ушаковъ (ст. Усть-Медвѣдицкая); *К. Межинскій* (Симбирскъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Бабанская* (Тифлисъ).

№ 380 (1 сер.). Найти число, которое равно суммѣ цифръ своего куба.

Пусть x есть искомое число и также сумма цифръ его куба x^3. Такъ какъ всякое цѣлое число при дѣленіи на 9 даетъ такой же остатокъ, какой даетъ и сумма его цифръ при дѣленіи на 9, то разность между числомъ и суммой его цифръ всегда дѣлится на 9 безъ остатка, т. е.

$$x^3-x=(x-1)x(x+1)=9k \quad . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

гдѣ k есть цѣлое число. Слѣдовательно либо $x-1$, либо x, либо $x+1$ дѣлится безъ остатка на 9.

Пусть число x состоитъ изъ n цифръ. Minimum n-значнаго числа есть 10^{n-1}, а maximum суммы его цифръ есть $9n$: такъ какъ кубъ n-значнаго числа не можетъ содержать болѣе $3n$ цифръ, изъ коихъ каждая не болѣе девяти, то

$$27n > 10^{n-1}$$

Неравенство это удовлетворяется при $n = 1$ и $n = 2$. При $n = 3$ первая часть уже меньше второй, а такъ какъ эта послѣдняя возрастаетъ, очевидно, быстрѣе первой, то ни одно изъ значенiй n, большихъ нежели 2, не удовлетворитъ неравенству. Слѣдовательно искомое число не можетъ быть больше 54.

Возвышая 54 въ кубъ, находимъ 157464. Такъ какъ $1+5+7+4+6+4 = 27$, т. е. меньше 54-хъ, то и искомое число меньше 54-хъ, а кубъ его меньше 157464. Легко видѣть, что сумма цифръ куба искомаго числа не можетъ быть больше пяти девятокъ; поэтому искомое число не превышаетъ 45-и.

Но изъ соотношенiя (α) слѣдуетъ, что искомое число либо кратно девяти, либо отличается отъ числа, кратнаго девяти, на единицу. Поэтому условiямъ задачи можетъ удовлетворить лишь одно изъ чиселъ:

0, 1, 8, 9, 10, 17, 18, 19, 26, 27, 28, 35, 36, 37, 44, 45.

Пробуя эти числа, находимъ, что условiямъ задачи удовлетворяютъ:

0, 1, 8, 18, 27.

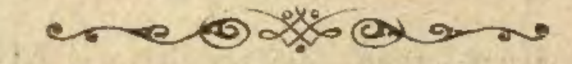
С. Ш. (Одесса); *А. Колтановскiй* (Немировъ).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНIЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 87, 121, 123, 127 (3 сер.) и 288 (1 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 120, 122, 124, 125 (3 сер.); *И. Трухановича-Ходановича* (Кiевъ) 82, 103 (3 сер.); *Д. Татаринова* (Троицкъ) 103 (3 сер.); *А. Бачинскаго* (Холмъ) 120, 122, 123, 125, 127, 128 (3 сер.); *В. Стройновскаго* (?) 120 (3 сер.); *Н. Андрикевича* (Очаковъ) 108, 109, 120, 123 (3 сер.); *И. Никольскаго* (Очаковъ) 108, 109, 120 123 (3 сер.); *А. Варенцова* (Ростовъ на Дону) 21, 108, 112, 113, 115, 119, 120, 123, 124, 125 (3 сер.); *И. Барковскаго* (Могилевъ губ.) 113, 115, 120, 123, 125 (3 сер.); *А. Дмитрiевскаго* (Цивильскъ) 115, 120, 125 (3 сер.); *К. Зновицкаго* (Кiевъ) 120, 128, 135 (3 сер.); *Г. Левихова* (Тамбовъ) 131 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Могилевъ губ.) 85, 90, 120, 125, 127 (3 сер.); *I. Кучинскаго* (Могилевъ губ.) 82, 83, 85, 92 (3 сер.).

ЗАПОЗДАВШIЯ РѢШЕНIЯ задачъ были получены: отъ *И. Треумова* (Иваново-Вознесенскъ) № 531 (2 сер.); *А. П.* (Ломжа) № 6 (3 сер.); *П. Иванова* (Одесса) № 29 (3 сер.); *С. Бабанской* (Тифлисъ) №№ 12, 27, 28, 34, 36 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Могилевъ губ.) №№ 420, 430, 431 (2 сер.); *П. Хлѣбникова* (Тула) 25 (3 сер.); *Н. Кузнецова* (Иваново-Вознесенскъ) 35 (3 сер.); *Г. Легошина* (с. Знаменка) 532 (2 сер.).

ОСТАЛИСЬ НЕРѢШЕННЫМИ изъ предложенныхъ въ XIII, XIV, XV и XVI семестрахъ задачи 2-ой серiи: 394, 402, 425, 439, 444, 453, 511, 545, 548, 556, 577 и 3-ей серiи 24, 32, 47, 58, 59, 61, 67, 70 и 73.

Конецъ XVII-го семестра.



Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскiй.**

Дозволено цензурою. Одесса, 9-го Февраля 1895 г.

„Центральная типо-литографiя", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{u'}{k(1+u^2)}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{k}\sqrt{1+u^2},$$

гдѣ

$$u = \frac{r\cos\vartheta}{\varrho} \text{ и } k = \frac{ds_1}{ds}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда M_1 есть прямая, кривая M должна быть винтовою линіей.

Notes mathématiques. 10. *Valeur approchées de π.* Чтобы умножить или раздѣлить данное число на $\pi = 3{,}141592$ предлагается пользоваться слѣдующими приближенными числами:

$$\pi = \begin{cases} 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{800} = 3{,}1416\,\frac{1}{14}, \\ 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{60} = 3{,}1416\,\frac{2}{3}, \\ 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{8000} - \frac{1}{7000} = 3{,}141592\,\frac{6}{7}; \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{100} - \frac{1}{200} = 0{,}3183\,\frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{100} - \frac{1}{200} - \frac{1}{50000} = 0{,}31831\,\frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{100} - \frac{1}{200} - \frac{1}{40000} = 0{,}318308\,\frac{1}{11}. \end{cases}$$

Интересны также приближенныя значенія:

$$\pi^2 = 10.(1 - 0{,}013) \quad \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{10}(1 + 0{,}013).$$

11. *Sur le cercle de Boscowich.* Кругъ Босковича (1711—1787) служитъ для построенія точекъ конич. сѣч., когда заданы фокусъ, директрисса и отношеніе разстояній точекъ отъ фокуса и директриссы.

12. *Sur les figures semblables.*

13. *Sur les Wronskiens.*

Solutions de questions proposées. №№ 841, 844, 864, 869, 875, 883.

Questions d'examens. №№ 636—639.

Questions proposées. №№ 955—963.

Д. Е.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ АНГЛІЙСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Химія.

Carnegie, *D.* Lawand Theory in Chemistry: a Companion Book for Students. Post. 8vo. pp. 220. Longmans. 6 s.

Phillips, *H. J.* Engineering Chemistry: a Practical Treatise for the use of Analytical Chemists, Engineers, Ironmasters, Ironfounders, Students, and others. 2nd edit. revised and enlarged, post 8vo. pp. 392. Lockwood. 10 s. 6 d.

Rose, T. K. The Metallurgy of Gold: being one of a Series of Treatises on Metallurgy. Written by Associates of the Royal School of Mines, edited by Professor W. C. Roberts-Austen. With numerous Illustrations. 8vo. pp. 466. Griffin. 21 s.

Briggs, W., and *Stewart, R. W.* Elementary Qualitative Analysis. Cr. 8vo. Clive. 1 s. 6 d.

Church, A. H. The Laboratory Guide: a Manual of Practical Chemistry for Colleges and Schools. Specially arranged for Agricultural Students. 7th edit. revised. Post 8vo. pp. 300. Gurney & J. 6 s. 6 d.

Davy (Humphry) on the Decomposition of the Alkalies and Alkaline Earths: Papers published in the Philosophical Transactions, 1807—1808 (Alembic Club Reprints, № 6). Cr. 8vo. (Edinburgh, W. F. Clay) pp. 52. Simpkin. 1 s. 6 d. net.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ НѢМЕЦКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Математика.

Kronecker, Leop. Vorlesungen über Mathematik. Hrsg. unter Mitwirkung einer von der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. 1. Bd. Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Intregrale. Hrsg. von Prof., Dr. Eug. Netto. gr. 8⁰. (X+345). Leipzig. B. G. Teubner. M. 12,00.

Bendt, Frz. Katechismus der Trigonometrie. 2. Aufl. 12⁰. (VIII+133 M. 42 Fig.) Leipzig. J. J. Weber. M. 1.80.

Cantor, Mor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. Bd. Vom J. 1668 bis zum. J. 1759. 1. Abtlg. Die Zeit von 1668 bis 1699. gr. 8⁰ (251). Leipzig. B. G. Teubner. M. 6,00.

Hagen, Joh., G., S. J., Dir. Synopsis der höheren Mathematik. 2. Bd. Geometrie der algebraischen Gebielde. gr. 4⁰. (V+416). Berlin. F. L. Dames. M. 30,00.

Vleck, Edward Burr van. Zur Kettenbruchentwickelung Lamé'scher und änlicher Integrale. Diss. gr. 4⁰ (III+91 m. 29 Fig.) Baltimore, Göttingen. Vandenhoeck & Ruprecht. M. 3,60.

Vogler, Ch. Aug., Prof., Dr. Lehrbuch der praktischen Geometrie. 2. Tl. Höhenmessungen. 1. Halbbd. Anleitung zur Nivellieren oder Einwägen. gr. 8⁰ (VIII+422 m. 1 Tab., 90 Holzst., 4 Zinkätzgn. u. 5 Taf.). Braunschweig. F. Vieweg & Sohn. M. 11,00.

Bachmann, Paul. Zahlentheorie. Versuch einer Gesammtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. 2 Thl. Die analytische Zahlentheorie. gr. 8⁰ (XVIII+ +494). Leipzig. B. G. Teubner. M 12,00.

Bardey, Ernst., Dr. Zur Formation quadratischer Gleichungen. 2. (Titel-) Ausg. gr. 8⁰ (VIII+390) Leipzig. B. G. Teubner. M. 3.00.

Dore, R., Realgymn.-Prof., Dr. Die Kreislinie und die Seite des kreisgleichen Quadrat, annähernd darstellbar durch goniometrische Functionen. Ein Beitrag zur Quadratur des Kreises. gr. 8⁰ (2). Elbing. C. Meissner. M. 0,50.

Fort, O., und. *O. Schlömilch.* Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Tl. Analytische Geometrie der Ebene von weil. Prof. O. Fort. 6. Aufl, besorgt von R. Heger. gr. 8⁰ (VIII+264 m. Holzschn.) Leipzig. B. G. Teubner. M. 4,00.

Ganter, H. und. *F. Rudio*, Proff. DD. Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium dargestellt und mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen. 2. Aufl. gr. 8⁰ (VI+168 m. 54 Fig.). Leipzig. B. G. Teubner. M. 2.40.

Hermes, Osw. Ueber Anzahl und Form von Vielflachen. Progr. 4⁰. (30 m. 2 Taf.). Berlin. R. Gaertner. M. 1,00.

Lange, Jul., Prof., Dr. Geschichte des Feuerbachschen Kreises. Progr. 4⁰. (34 m. 2 Taf.). Berlin. R. Gaertner. M. 1,00.

Puchberger, Eman. Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. 1. Hft. gr. 8⁰. (IV+24). Wien. C. Gerold's Sohn. M. 1,00.